Lectures on Symmetry Conclusions

Jean-Jacques Szczeciniarz. *University Paris 7*

2012, 2013

Content:

Le milieu du XIX è siècle est l'époque de la naissance de la théorie des invariants. Son origine se trouve dans des problèmes de géométrie projective: rechercher une quantité définie sur l'espace projectif et invariante par tout changement projectif de coordonnées C'EST RECHERCHER UNE QUANTITÉ AYANT UNE SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE. Commentaire être c'est être invariant
[Olver] Classical invariant theory London Mathematical Society students texts CUP 240 références dont plus de 50 avant 1900

Le prototype d'invariant algébrique est le discriminant d'un polynôme quadratique, quantité qui reste identique lorsqu'on effectue un changement de base unimodulaire, c'est-à -dire conservant les volumes. La nullité de ce déterminant correspond à la dégénérescence de la quadrique associée

Pour Weyl le "Mémoire sur les hyperdéterminants " de Cayley constitue l'acte de naissance de la théorie des invariants algébriques. On trouve dans Sylvester le cadre dans lequel se faisait la recherche d'invariants: étant donnée une forme c'est-à-dire un polynôme homogène à plusieurs variables et une forme associée i. e. le polynôme tel que que sa valeur sur les variables ayant subi une transformation linéaire ou projective selon, soit éal au polynôme donné évalué sur les variables non transformées, Sylvester se propose de chercher les quantités qui demeurent inchangées par ces transformations i.e. des invariants

Il introduit les notions de substitution covariante ou contravariante selon que l'on voit cette forme comme un tenseur covariant ou contravariant.Weitzenbock écrit dans la préface de son livre 1923 : "Tenseur n'est finalement plus qu'un autre nom pour ce que l'on appelé jusqu'ici 'forme' ""

C'est un problème formel.
Etant donnée une classe particulière de formes (par exemple les formes quadratiques binaires, i.e. les polynômes homogènes quadratiques en deux variables) donner la liste complète de tous les invariants algébriques d'une forme de cette classe en fonction de ses coefficients. Aronhold 1858, Clebsch 1861, Gordan 1868, Maschke 1900 et mathématiciens italiens développent une méthode algorithmique dite symbolique fondée sur la considération des éléments décomposables dans les produits tensoriels dont le but était d'obtenir à partir d'un invariant connu pour une forme de classe donnée les autres invariants de cette même forme.

On passe alors à la recherche d'invariants d'une forme différentielle dont les coefficients sont des fonctions. Comme les coefficients de ces formes sont non constants leurs dérivées intervenaient dans les expressions transformées les invariants recherchés sont nommés *invariants différentiels*.
On doit passer à une méthode différente de la méthode symbolique à cause des perspectives ouvertes par ce problème apparemment calculatoire

Il amenait naturellement au calcul "différentiel absolu ", au calcul tensoriel, à la dérivation covariante de Gregorio Ricci et Tullio Levi-Civita sur les variétés. Définir un tenseur sur une variété revient à le définir localement dans une formulation invariante par changement de cartes. Mêmes méthodes appliquée a la recherche des invariants intégraux de Henri Poincaré et d'Élie Cartan auxquels s'appliquaient les techniques du calcul variationnel.

La recherche des invariants différentiels menait à des équations différentielles invariantes sous l'action d'un groupe on pouvait donc lui appliquer la théorie de Lie des groupes continus de transgormations. qui permet d'exprimer l'invariance d'une équation par rapport à un tel groupe ou plutôt à un germe d'un tel groupe. [Lie Engel 1893] Lie travaillait par annulation des dérivées vectorielles dans les directions données par le groupe infinitésimal sous-jacent., l'algèbre de Lie du groupe donné

Tresse Thèse Sur les invariants différentiels de groupes continus de transformations Paris 1893. L Autonne CRA 112, Jan Arnoldus Schouten 1954 David van Dantzig CRA Amsterdam 1932 dérivation de Lie, Van Kampen, Schouten cf Varsovie 1933 Algèbre de Lie dans les années 30 attribué à H Weyl cf. Nathan Jacobson A. J. Coleman Groups and Physics Dogmatic opinion of a senior citizen Notices of American Mathematical Society 44 janvier 1997

Liens entre la recherche des invariants différentiels et celle des quantités conservées dans le temps pour les équations de la physique appargraduellement et, en toute généralité seulement après les premiers travaux d'Emmy Nœther. Conséquence de son premier travail dans le cas d'une équation dérivant d'un principe variationnel en une variable indépendante.

Edmund Whittaker, dans son traité de dynamique attribue la découverte des lois de conservation du moment angulaire et du moment linéaire à Newton : il avait observé que en l'absence de forces extérieures le centre de gravité d'un système mécanique est au repos ou se déplace d'un mouvement linéaire uniforme et d'autre part avait généralisé la loi des aires de Kepler.

Pour ce qui est de la conservation de l'énergie Whittaker reconnaît le rôle de Joseph-Louis Lagrange? Selon Aurel Wintner Lagrange connaissait les conséquences de l'invariance galiléennes des équations du mouvement. dès 1777. Pour obtenir les des lois de conservation connues il donne une méthode nouvelle dans ses "Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse du carré des distances". Dans la deuxième édition de la *Mécanique analytique* 1811-15, Lagrange observe une corrélation entre symétries et principes de conservation de certaines quantités surtout pour la conservation de l'énergie.

Dans la première section de deuxième partie consacrée à la dynamique, Lagrange présente l'historique de divers "principes ou théorèmes" découverts par Galilée, Huyghens, Newton, Daniel Bernouilli, Euler, d'Alembert et quelques autres. A propos de la conservation des moments de rotation il dit: " Dans le mouvement de plusieurs corps autour d'un centre fixe, la somme des produits de la masse de chaque corps par sa vitesse de circulation autour du centre et par sa distance au même centre [...] se conserve tant qu'il n' y a aucune action ni aucun obstacle extérieur"

A la section 7 il introduit l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2} m \Sigma ((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2)$ et dans le cas où la force dérive d'une fonction de force qu'il note V , il écrit pour le "lagrangien "$T - V$" et les équations d'Euler Lagrange" section 14 p. 295

Dans le cas où la force dérive d'une fonction de force qu'il note V, l'opposé est aujourd'hui le potentiel.

> *Un intégration qui a toujours lieu lorsque les forces sont des fonctions de distances [i.e. ne dépendant que des vitesses] et que les fonctions T, V, L, M etc. ne contiennent pas la variable t est celle qui donne le principe de conservation des forces vives*

A l'aide de la relation de la formule d'intégration par parties il démontre ce principe i.e. le théorème énonçant que l'énergie totale reste $T + V$ reste constante. Pour les autres intégrales premières il est beaucoup moins précis. Jacobi dans ses *Vorlesungen über Dynamik* Konigsberg met en évidence le lien entre l'invariance euclidienne du lagrangien en mécanique sous l'action des translations et des rotations et les lois ce conservation des moments angulaires et linéaires

Ignaz R. Schutz membre de l'Institut de physique de Gottingen étudie le principe de conservation de l'énergie et montre qu'il est largement indépendant du principe énoncé par Newton de l'égalité de l'action et de la réaction et dérive la loi de conservation de l'énergie des équations du mouvement pour un point pesant isolé puis pour un système isolé

Rôle important de G Hamel se proposant c'établir les relations entre la mécanique et d'autres domaines des mathématiques. "Sur les déplacements virtuels en mécanique. en particulier le calcul des variations. Gustav Herglotz étudie diverses questions de mécanique des corps solides du point de vue de la RR . Il considère le groupe d'invariance de la RR à dix paramètres agissant sur l'espace temps à quatre d = espace-temps de Minkowski. 9 il use du calcul variationnel (celle plus tard utilisée par E Nœther) il dérive dix lois de conservation associées aux transformations infintésimales du groupe de Poincaré (cité par Nœther et Klein *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* I et II Berlin Springer 1926 et 1927 trad. anglaise

Dans *Göttinger Nachrichten* 1916, paraît une lettre de F Engel adressée à Klein. Il y remarque que l'on peut à partir du résultat de Herglotz et en faisant tendre la vitesse de la lumière vers l'infini retrouver les dix intégrales de la mécanique non relativiste. Il se propose d'obtenir ce résultat directement, sans passage à la limite en utilisant le formalisme hamiltonien et l'invariance du hamiltonien sous l'action des dix transformations infinitésimales du groupe à dix paramètres de Galilée, il obtenait les dix lois de conservation de la mécanique du problèmes n*corps*

Il retrouve en particulier le résultat de Schutz de 1897 sur la conservation de l'énergie totale du système et dans une lettre publiée en 1917 Engel montre comment utiliser les quantités conservées pour l'intégration des équations de la mécanique suivant la méthode de Lie (sans les méthodes variationnelles).

Constat. Les éléments pour une théorie générale des propriétés d'invariance et quantités conservées apparaissent à travers de nombreuses publications mais l'eesentiel des résultats de Nœther ne se trouve chez aucun. Elle a non seulement généralisé des résultats épars concernant la Mécanique classique et la RR mais a mis en œuvre une méthode originale. La considéartion d'un groupe de symétrie b adapté au problème (groupe de Lorenz inhomogène pour justifier l'existence de l'intégrale des forces vives et la deuxième intégrale du centre de gravité) rend naturelles les lois de conservation connues mais encore donne une méthode générale pour calculer les les lois de conservation à partir des symétries d'un problème variationnel et inversement cf. *Einsteins studies*. Einstein 1907 constate que les lois de la physique ne permettent pas de distinguer un référentiel soumis à un champ de gravitation constant d'un référentiel en accélération uniforme et pose le problème d'une extension du principe de relativité à cette situation plus générale. Après 1912 il cherche à trouver pour les lois de la gravitation une expression qui soit invariante par un groupe de transformations des coordonnées plus grand que celui composé des transformations de Lorentz et des translations et invariante par des changements arbitraires de coordonnées

Période d'études avec Max Abraham et Gunnar Nordstrom et M Grossmann l'étude du calcul différentiel absolu de Ricci et de Levi-Civita : cadre mathématique à l'exrension du principe de relativité. Il cherche à mettre les lois de la gravitation sous la forme d'équations différentielles du second ordre généralement covariantes à partir d'une métrique $g_{\mu\nu}$non constante décrivant le potentiel de gravitation. Après plusieurs tentatives Einstein renonce temporairement à la covariance générale des équations de gravitation afin de pouvoir garder une loi de conservation de l'énergie

Remarques. Einstein et les lois de conservation de l'énergie: 1906, 1907 Annalen der Physik lettres à Michele Besso celles surtout datées de Ahrenshoop où il écrit que l'énergie totale d'un système est un "invariant intégral auquel ne correspond aucun invariant différentiel et lettre du 20 août 1918, il discute une théorie de Weyl et il y revient sur la question de l'énergie. cf. Intro de Pierre Speziali

Einstein s'est limité aux changements de coordonnées linéaires puis introduit des changements de coordonnés adaptés reconnus omme étant des systèmes de coordonnées reliés entre eux par des transformations unimodulaires, (jacobien égal à un) Première version : le *Entwurf*. Dans ce cadre en 1915 Einstein établit des équations de la gravitation. Et constate après modification qu'elles sont tensorielles donc généralement covariantes 4, 11, 18 novembre il présente ses conclusions à l'Académie des Sciences.

Problème restant de taille. [Earman Glymour] la loi de conservation de l'énergie impliquait lorsqu'on prenait un système de coordonnées bien adpatéss que le tenseur d'énergie impulsion s'annulait en tout point de l'espace. Ceci sous-entendait que l'énergie scalaire (la trace du tenseur énergie impulsion) était constante, ce qui n'est vérifié que pour un champ gravitationnel homogène. Il manquait le fameux terme de trace que Einstein introduisit dans son article de 1915

Restait le problème qui nous intéresse : la loi de conservation de l'énergie ne semblait pas être une conséquence directe des équations de la gravitation. Travaux de Paul Ehrenfest et Hendrik A. Lorentz contribuèrent à éclairer la question de la conservation de l'énergie. Ils ont inspiré Nœther. CR A d'Amsterdam P. Ehrenfest calcule les invariants d'un problème variationnel Lorentz propose un lagrangien et établit les équations de la RG à partir du principe variationnel correspondant puis dérive la loi de conservation des moments de l'énergie. 1 ère version de la RG. Lorentz de mars à juin 1916 fait une série de conférences théorie géométrique invariante de la RG. E Nœther se réclame de ces travaux

Dans son article"Which is symmetry? Nœther, Weyl and the conservation of electric charge?" K. Brading montre que le raisonnement mené par Weyl en 1918 pour parvenir aux lois de de conservation de l'énergie-impulsion et de la charge est une application du second théorème de Nœther. Nœther publie ses deux théorèmes au cours de l'année 1918. Nœther et Weyl participent tous deux la mathématisation de la RG entreprise par Klein et Hilbert. de la fin de l'année 1915 à l'année 1918 à Göttingen. Weyl a été recruté à l'ETH de Z urich dès 1913. Tous trois restent attachés l'école de physique math de Göttingen. Nœther s'est installée à Göttingen dès 1916.

Rôle important de Hilbert. Il avait démontré plusieurs théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants. La relativité rejoignait les interrogations sur la gé ométrie commune Ȟilbert et à Klein. Dans le programme d'Erlangen de 1872 Klein définit une géométrie comme la donnée d'une variété et d'un groupe de transformations sur cette variété groupe des difféomorphismes en langage d'aujourd'hui. Pour Hilbert il y a un lien entre la théorie des invariants et la géométrie d'une part et le problème de l'extension de la théorie de la relativité d'autre part

Importante correspondance Hilbert Einstein. Hilbert introduisit deux axiomes et une fonction généralement invariante dont il déduisait dix équations de gravitation et quatre équations d'électromagnétisme. (covariantes par changement de coordonnées quelconques). Ce sont les équations d'Einstein dont H a eu connaissance par une lettre du premier. Hilbert utilsait un principe variationnel pour justifier les équations de champ et d'autre part Hilbert obtenait directement une loi de conservation du tenseur d'énergie- impulsion en apparence différente d'Einstein

Les incertitudes sur les rapports entre les théories d'Einstein et de Hilbert et sur les lois de conservation de l'energie associées furent réglées dans deux articles: *Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie* 1918, et *Über die Integralformder Erhaltungssatze und die Theorie der räumlichengeschlossenen Welt* il y élucide en utilisant les théorèmes de Nœther la dérivation des lois de conservation obtenues par Einstein et Hilbert et le caractère vectoriel des quantités introduites par Hilbert. La difficulté majeure : différence mécanique classique et RR d'une part et RG de l'autre a été résolue par Nœther

Résumé correctement dans l'article de K. Brading "A note on General Relativity, Energy, Conservation and Nther theorem" Dans sa réponse à la note de Hilbert sur les fondements de la physique Klein repère que les lois de conservation de l'énergie sont des identités mathématiques en Relativité générale; or cette singularité n'apparaît pas dans le cas des lois de conservation de l'énergie qui nous sont familières. P.. e. en mécanique classique ou en relativité restreinte.

Hilbert donne immédiatement raison à Klein. Il faut démontrer l'hypothèse suivante : le fait que les lois de conservation soient des identités constitue une propriété caractéristique de la RG.. " ja ich mochte diesen Umstand sogar als ein charakteristisches Merkmal der allgemeinen Relativitatstheorie bezeichnen" F. Klein, *Werke* Bd III, pp. 561

Parallèlement Klein entre en correspondance avec Einstein au cours de 1917 Einstein dans sa lettre à Klein de mars 1918, refuse d'admettre a) que les lois de conservation sont des identités en RG b) qu'elles auraient un statut différent de celui qu'elles ont en mécanique classique et en RR.

Les motivations de E. Nœther sont dans *Variationproblem* de trois ordres : a) elle donne raison à Klein et Hilbert concernant le statut des lois de conservation en RG b) elle prouve l'hypothèse de Hilbert c) elle la généralise en s'appuyant sur des propriété s des groupes et des algèbres de Lie

Les théorèmes de Nœther

Son point de vue est d'une très grande généralité. Elle s'appuie sur des lagrangiens généralisés, et donc pas spécifiquement sur des lagrangiens adaptés de la MC. Elle ne spécifie pas la nature des groupes de Lie qui interviennent dans ces théorèmes. Les principes auxquels parvient E. Nœther connaîtront un e grande fortune en physique. au-delà de la RG.

Le théorème de Nœther constitue une généralisation des théorèmes de la MC. "Le théorème 1 contient tous les théorèmes classiques en M. au sujet des intégrales premières." "Problèmes variationnels invariants " Trad. Mersemann et Kosmann Schwartzbach, in Y Kosmann , "Les théorèmes de Nœther invariants et lois de conservation au XIXè siècle" ed. de l'Ecole polytechnique. 2004

Son originalité consistait à englober la mécanique classique et le formalisme de la RG. Elle considère le problème dans sa grande généralité: un problème lagrangien d'ordre arbitraire, à un nombre arbitraire de variables indépendantes et dépendantes et une invariance du lagrangien sous l'action d'un "groupe de transformations infinitésimales= une algèbre de Lie de dimension finie ou de dimension infinie sont des généralisations des champs de vecteurs usuels dont les composantes dépendent des variables dépendantes et indépendantes et de leurs dérivées successives. Les symétries qu 'elles considèrent peuvent dépendre non seulement des variables de champ mais aussi de leurs dérivées premières et au-delà

Rappel : une loi de **conservation** en mécanique est une quantité dépendante des variables de configuration et de leurs dérivées qui reste constante au cours du mouvement. Une loi de conservation dans une théorie des champs régie par une équation d'évolution est une relation de la forme $\frac{\partial T}{\partial t} + \Sigma_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\lambda} = 0$ où $T, X_1 \cdots X_n$ sont des fonctions de variables de champ et de leurs dérivées, satisfaites lorsque les équations de champ sont satisfaites.

Remarque un peu plus mathématique. Si les conditions d'annulation au bord du domaine d'intégration des quantités considérées sont vérifiées on en déduit en appliquant le théorème de Stockes que l'intégrale de T par rapport aux variables d'espace, $x_1, \cdots, x_n$ est constante au cours du temps. On dit que T est la densité d'une quantité conservée. Les lois de conservation fournissent des intégrales ne dépendant que du bord du domaine d'intégration. Dans le cas de deux variables indépendantes on obtient des intégrales curvilignes ne dépendant que des extrémités du chemin considéré

Un lagrangien généralisé est une fonction lisse de n variables indépendantes, $x_1, \cdots, x_n$ et de p variables dépendantes $u_1 \cdots u_p$ ainsi que de leurs dérivées jusqu'à l'ordre m

$$L(x, u^{(m)})$$

Soit Ω un ouvert connexe de R^n, un problème variationnel généralisé consiste à trouver un extremum à une fonctionnelle

$$I = \int_\Omega L(x, u^{(m)}) dx$$

Peut-on en tirer des conséquences pour l'analyse des rapports maths physique?

Rappel de ce qu'est un groupe de Lie. Un groupe de Lie réel Γ est une variété diffŕentiable de dimension finie munie d'une structure de groupe telle que les opérations de multiplication et d'inverse soient différentiable (analytique s'il l'on a une variété analytique (complexe ou non). Un groupe de Lie à paramètres admet générateurs de l'algbre de Lie associée

L'algèbre de Lie γ d'un groupe de Lie Γ est l'espace tangent à lidentité de Γ. De très nombreuses conséquences

Rappel. L'objet du calcul des variations est la recherche des extremums de fonctions dont le domaine de définition est un espace de dimension infinie: l'espace des courbes. ces fonctions sont appelées *fonctionnelles*. Exemple de fonctionnelle : la longueur d'une courbe dans le plan euclidien

$$\gamma = \{t, x : x(t) = x : t_0 \leq t \leq t_1\}$$

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$$

On appelle fonctionnelle toute application de l'espace des courbes dans l'axe numérique.
Soit une courbe $\gamma' = \{t, x : x = x(t) + h(t)\}$ voisine de la courbe γ. On la désigne par $\gamma' = \gamma + h$. Soit l'accroissement de la fonctionnelle Φ : $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma)$.

Une fonctionnelle Φ est différentiable si $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F + R$ avec F dépendant linéairement de h et $R(h, \gamma) = O(h^2)$ au sens où $|h| < \epsilon, \frac{dh}{dt} < \epsilon$ entraîne $|R| < C\epsilon^2$. la partie inéaire de l'accroissement $F(h)$ s'appelle *différentielle*.

Un théorème important;
La fonctionnelle $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt$ est différentiable, et sa différentielle est donnée par $F(h) = \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}]hdt + (\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}h)|_{t_0}^{t_1}$

On appelle *extrémale* d'une fonctionnelle différentiable $\Phi(\gamma)$ une courbe γ telle que $F(h, \gamma) = 0$ cf. un point stationnaire pour une fonction.

Remarque sur l'abstraction mathématique

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe $\gamma : x = x(t)$ soit extrémale de la fonctionnelle $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt$ sur l'espace des courbes passant par les points $x_0 = x(t_0)$ et $x_1 = x(t_1)$ est que sur la courbe $x(t)$ on ait $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$.

Le premier théorème

Préliminaires Soit l'intégrale

$$I = \int \cdots \int f(x, u, \frac{\partial u}{\partial t,}, \frac{\partial^2 u}{x^2} \cdots) dx$$

f est un lagrangien d'ordre supérieur, fonction de n variables indépendantes

$$x_1, \cdots, x_n$$

et de μ variables dépendantes $u_1 \cdots u_\mu$ ainsi que de leurs dérivées jusqu'à l'ordre k fixé et arbitraire. Elle considère une variation $\delta u = (\delta u)_i$ de u et donne l'identité

$$\Sigma_{i=1}^{\mu} \psi_i \delta u_i = \delta f + Div A$$

Formulation un peu plus simple. Si un groupe de transformations dépendant de manière lisse de ρ paramètres constants $\omega_k, \; k = 1 \cdots \rho$est un groupe de symétrie des équations d'Euler-Lagrange associées un lagrangien $L(\phi, \partial_\mu \phi_i, x^\mu$ alors les ρ relations suivantes sont satisfaites, une pour chacun des paramètres desquels le groupe de symétrie dépend.

$$\Sigma_i E_i^L \xi_i^k = \partial_\mu j_k^\mu$$

Le côté gauche représente une combinaison linéaire des expressions d'Euler

$$E_m^l \equiv \frac{\partial L}{\partial \phi_m} - \partial_\mu (\frac{\partial L}{\partial \phi_{m,\mu}})$$

où $E_m^L = 0$ sont les expressions d'Euler-Lagrange pour le champ ϕ_m. Les ξ_i^m dépendent de transformations symétriques particulières et des champs considérés

Le côté droit nous avons la divergence d'un courant, j_k^m. Quand le côté gauche s'annule, la divergence du courant est égale à zéro et cette expression peut être convertie en une quantité conservée soumise à certaines conditions =donc connexion entre symétries globales et quantités conservées.

Si on revient à l'expression de Nœther, les ψ_i sont les expressions lagrangiennes, i. e. les composantes de la dérivée variationnelle (dérivée de Lie-Lagrange de f), les composantes A_λ de A sont linéaires en la variation δu et en ses dérivées. L'opposée de A est appelée aujourd'hui la transformée de Legendre du lagrangien f et Div est la divergence ordinaire. $DivA = \Sigma_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\lambda}$ et δf est la variation de de f correspondant à variation δu de u, la variation de x étant supposée nulle.

Si l'intégrale I est invariante par rapport à un groupe Γ_p, alors il y a ρ combinaisons linéaires entre les expressions lagrangiennes qui deviennent des divergences- et réciproquement il résulte de cela l'invariance de I par rapport à Γ_p, la proposition reste encore valable pour un nombre infini de paramètres.

Dans le cas où $n = 1$ intégrale simple, Nœther donne une expression de A pour μ quelconque $\kappa = 1$ ce qui donne ce qu'elle appelle l'identité de Heun "équation centrale lagrangienne" puis pour κ quelconque elle énonce le théorème

Lorsque $n = 1$ on obtient des intégrales premières, en dimension plus grande " l'on obtient les équations de divergence qui depuis peu sont souvent appelées 'lois de conservation'". Démonstration très courte. Elle fait l'hypothèse de l'invariance de l'intégrand fdx soit $\delta(fdx) = 0$. Cette hypothès se traduit par

$$\overline{\delta} f + Div(f.\delta x) = 0$$

Ici $\overline{\delta} f$est la variation de f pour

$$\overline{\delta} u_i = \Delta u_i - \Sigma \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda} \Delta x_\lambda$$

Nœther inroduit ce que l'on appelle les composantes du "champ de vecteurs généralisé vertical " $\overline{\delta}$ associé à δ. $\overline{\delta} f$ est la dérivée de Lie de f dans la direction du champ vertical $\overline{\delta}$. Elle utilise son identité

$$\Sigma_{i=1}^{\mu} \psi_i \delta u_i = \delta f + DivA$$

qui s'écrit

$$\Sigma_{i=1}^{\mu} \psi_i \delta u_i = DivB$$

avec $B = A - f\Delta x$

Il suit immédiatement que si les équations d'Euler-Lagrange $\psi_i = 0$ sont satisfaites alors B est une loi de conservation.
A chaque transformation d'invariance du lagrangien, i. e. à tout couple $(\Delta x, \Delta u)$ satisfaisant la relation correspond une combinaison linéaire des exptressions lagrangiennes qui est une divergence. Puis elle vérifie que les lois de conservation associées à ρ transformations infinitésimales d'invariance décrite note 1 p. 122 de son texte. Des points seront précisés par Vinogradov (1970, 1980).

Elle démontre la réciproque: si ρ relations des expressions lagrangiennes sont des divergence alors il existe une famille ρ paramètres de transformations infinitésimales d'invariance linéairement indépendantes, et par conséquent, l'intégrale variationnelle est indépendante sous l'action d'un groupe continue à ρparamètres

On remarque la raison pour laquelle le théorème de Nœther est le plus souvent associé une connexion entre symétries globales continues et quantités conservées, je rappelle la connexion entre translations globales et conservation du moment linéaire, rotations spatiales et et conservation du moment angulaire, translations dans le temps et conservation de l'énergie.

On remarque également que la connexion entre les *symétries variationnelles* (connectées à l'invariance de l'action et dans ses termes les théorèmes de Nœther sont formulées) et les symétries dynamiques (concerrnant les lois dynamiques, cf. Olver 1993. Nœther elle-même n'a jamais traité de cette connexion et n'a jamis usé du terme de symétrie. Elle discute des intégrales mathématiquement analogues aux intégrales d'action de la physique lagrangienne, et use de techniques variationnelles et de théorie des groupes pour mettre à jour la corespondance entre symétries variationnelles de l'intégrale et un ensemble d(dentités.

Le groupe de Galilée

Le groupe Γ correspond *au groupe des transformations galiléenes.* définies par

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

En mécanique classique une transformation de Galilée détermine le passage d'un référentiel T à un autre référentiel en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à lui, à la vitesse v par rapport à T le long par exemple de l'axe des x. Le groupe de Galilée est à dix paramètres et l'on peut faire correspondre dix lois de conservations aux dix générateurs infinitésimaux de ce groupe

A l'invariance par translation dans l'espace est associée la conservation de l'impulsion du systè me dynamique étudié, à l'invariance par translation dans le temps est associée la conservation de l'énergie, et à l'invariance par rotation la conservation du moment cinétique

Dans le cas de la RR on remplace le groupe de Galilée par le *groupe de Poincaré* c'est-à -dire le produit semi-direct de $O(3,1)$ par le groupe des translations de R^{3+1}
Commenter cette loi de conservation.

La situation du deuxième théorème

Elle est différente. L'intégrale I est supposée invariante par un groupe Γ_∞ à un nombre infini de paramètres. et dépendant de fonction arbitraires et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre σ.

Voici la formulation de E. Nœther. "Si l'intégrale I est invariante par rapport à un groupe Γ_∞ dépendant de fonctions arbitraires et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre σ, alors il y a ρ identités entre les expressions lagrangiennes et leurs dérivées jusqu'à l'ordre σ et la réciproque est vraie"

C'est le cas de la RG. L'intégrale d'action est invariante par le groupe des difféomorphsimes d'espace-temps qui est n groupe de Lie de dimansion infinie dépendant de quatre fonctions arbitraires. On trouve quatre identités que E Nœther appelle "lois de conservation" impropres afin de les distinguer des lois de conservation propres que l'on trouve en MC

De même que le premier théorème peut se réaliser dans diverses théories classiques, MC et RR, de même le second n'est pas circonscrit *a priori* à la RG. Il s'applique à toutes les théories covariantes. qui satisfont au principe de covariance généralisée. ""Le théorème II peut être décrit comme la généralisation maximale de la RG en théorie des groupes ". pp.8-9

Une remarque plus spécifique sur ce deuxième théorème. Si un groupe continu de transformations dépendant de manière lisse de ρ fonctions arbitraires de l'espace et du temps $p_k(x), (k = 1, 2,$ et de leurs premières dérivéesest u groupe de symétries des équations d'Euler Lagrange associées au lagrangien $L(\phi, \partial_\mu \phi_i, x^\mu$, alors les ρ relations suivantes sont satisfaites, une pour chacune des fonctions dont le groupe de symétrie dépend.

$$\Sigma_i E_i^L a_{ki} = \Sigma_i \partial_\nu (b_{ki}^\nu E_i^L)$$

Les a_{ki} et b_{ki}^{ν} dépendent des transformations de champ particulières. tandis que les a_{ki} apparaissent mm̂e quand la transformation est une transformation globale, les b_{ki}^{ν} apparaissent quand elle est locale; Nous avons ici essentiellement ne dépendance entre les expressions d'Euler et leurs dérivées premières. Cette dépendance vaut comme une conséquence de la sym'etrie locale utilisée pour dériver le théorème.

Dans le cas où tous les champs sont dynamiques (satisfont les équations d'Euler-Lgrange)il suit que toutes les équations de champ ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Cette (cf. Brading) *sous-déterminations formelle* caractérise les théories avec une structure de symétrie locale.

Le départ du papier se trouve dans les discussions entre Hilbert, Klein et Einstein sur le statiut de la conservation de l'énergie dans les théories généralement covariantes. . Hilbert prétend que la conservation de l'énergie n'a pas le même statut dans les théories généralement covariantes qu'elle l'avait dans les théories précédentes généralement non covariantes. car elle est indépendante des équations de champ pour les champs de matière. Les théorèmes de Nœther peuvent servir pour soutenir cette hypothèse.

Comme Hilbert l'a reconnu dans le contexte des théories de la gravitation généralement covariantes, cette sous détermination est indépendante de la forme spécifiqe du lagrangien.

E Nœther dans son deuxième théorème rend raison du caractère très spécifique de la loi de conservation dans les théories généralement covariantes. Elle démontre l'hypothèse de Hilbert. Commentaire.

Un instrument pour caractériser les niveaux d'énergie, les lois de conservation et les états quantiques d'un système

Théorème du bord qui est dans la droite ligne du théorème de Nœther, Siiva 1998).

E N. Se fonde sur la théorie des groupes de Lie et des algèbres de Lie po

Les quatre lois de conservation de l'énergie-impulsion sont liées à la prem

Remarquons, c'est une grosse thèse et cela a été étudié la question de l'i

Le principe de Wigner et la classification des niveaux d'énergie d'u

On ne peut formellement affirmer que les "lois de la nature" sont formellement invariantes par rotation dans l'espace usuel., car ce serait croire que l'espace usuel constitue le cadre e description d'un système quantique.

Il s'agit de représenter ces transformations géométriques dans l'espace des états du système. Il est nécessaire de faire correspondre à tout élément d'un groupe de transformations géométriques dans l'espace usuel un *opérateur* dans l'espace $\mathcal{H}$ des états du sysème.

Un exemple

Soit le groupe des rotations, la correspondance en question entre dans le cadre de la théorie des représentations des groupes topologiques et , *des groupes compacts*. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable, et G un groupe topologique : on appelle *représentation* de G la donnée d'un morphisme de groupe

$$G \to GL(\mathcal{H})$$

tel que pour tout $\hat{X} \in \mathcal{H}$

$$g \in G \to \rho(g)\hat{X} \in \mathcal{H}$$

soit continu.

Dans le cas de la MQ non relativiste, le groupe G peut désigner le groupe SO_3 groupe topologique compact. En réalité SO_3 admet une structure plus riche puisqu'il s'agit d'un groupe de Lie.
L'espace $\mathcal{H}$ correspond à l'espace des états du système étudié et $GL(\mathcal{H})$ au groupe des automorphismes de $\mathcal{H}$ qui sont des opérateurs linéaires de $\mathcal{H}$.

Par définition (Hilbert) $\mathcal{H}$ est muni d'un produit scalaire hermitien $<-,->$ Si $\hat{U}$ est un endomorphisme de $\mathcal{H}$ l'adjoint $\hat{U}*$ de est défini par

$$< \hat{U}x, y >=< x, \hat{U}^{*}y >$$

pour tous x, yde $\mathcal{H}$. Un automorphisme $\hat{U}$ de $\mathcal{H}$ est un opérateur linéaire unitaire si

$$\hat{U}\hat{U}^{*} = \hat{U}^{*}\hat{U} = Id_{\mathcal{H}}$$

Quelques aspects élémentaires

Une symétrie en MQ ne désigne pas un ensemble de transformations géométriques de l'espace usuel. Mais elle désigne un ensemble d'opérateurs agissant sur l'espace $\mathcal{H}$ des états du système.
Soit $\hat{H}$ le hamiltonien quantique du système étudié, i.e. l'opérateur hermitien associé à l'énergie. *Un opérateur de symétrie* du système est un *opérateur unitaire* qui *commute* avec $\mathcal{H}$ i.e.$[\hat{U}, \hat{H}] = 0$.

Un *groupe de symétries* du système est constitué d'opérateurs de symétries. Weyl construit le cadre théorique des représentations de groupe en MQ de cette manière. "The spherical symmetry of atoms"

Citation de Weyl.

> *[rotate] a spherical system P about the origin O by the rotation s. By this processthe arbitrary state r of P goes over a new state r'. Since everything which is physically significant must remain unchanged and since the system space of the vector r is unitary, the transition $r \rightarrow r'$must be a linear unitary operator $U(s)$ dependent on s, in the system space. I say briefly that $U(s)$ is induced in the system space by s. All such rotations s form the group of rotations of orthogonal transformations in our 3-dimensional Euclidean space..."*

The correspondence $U : s \to U(s)$must obey the following law

$$U(s)U(t) = U(ts)$$

to the composition of rotations s, t corresponds the composition of the induced operations in the system space. The mathematician calls such a correspondence a representation of the rotation group" H. Weyl The sperical symmetry of atoms The Rice Institute Pamphlet, 16 1928 in GEsammelte Abhandlungen, Bd III, p.272

Parmi tous les groupes du système il en est un qui contient tous les autres :*le groupe de symétries complet*. La mise au jour de ce groupe et de ses représentations irréductibles conditionne une description cohérente du système étudié.

Soit G un groupe de symétries du système., $\hat{H}$ son hamiltonien et ε_n l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de $\hat{H}$ pour la valeur propre E_n (il s'agit du niveau d'énergie.E_n). i.e. les vecteurs $|\Psi >$ tels que

$$\hat{H}(|\Psi >) = E_n(|\Psi >)$$

Comme $\hat{U}$ commute avec $\hat{H}$ on a

$$\hat{H}(\hat{U}|\Psi>) = \hat{U}(\hat{H}|\Psi>) = E_n(\hat{U}|\Psi>)$$

pour tout $|\Psi>\in \varepsilon_n$ et pour tout dans G, Le vecteur $\hat{U}|\Psi>$ est vecteur propre pour la valeur propre E_n, il appartient à ε_n Cet espace demeure invariant par G. Il peut donc servir d'espace sous-jacent à une représentation ε_n, ρ de G

Si G est le groupe de symétries complet du système alors une telle représentation est irréductible. D'où *le principe de Wigner*.

Chaque niveau d'énergie d'un système quantique est en correspondance avec l'une des représentations irréductibles du groupe de *symétries complet* de son hamiltonien. La *dimension* de la représentation irréductible associée à un niveau d'énergie correspond exactement au *degré de dégénérescence* de ce niveau d'énergie-une dégénérescence traduisant l'existence de plusieurs états quantiques associés à un même niveau d'énergie. Le principe de Wigner permet donc de classer les niveaux d'énergie de'un système quantique en fonction des représentations irréductibles du groupe de symétrie complet du système et de rendre raison du degré de dégénérescence de chaque niveau d'énergie

Un analogue du premier théorème de Nœther pour déterminer les lois de conservation d'un système

Redéfinir les lois de conservation en MQ et montrer comment elles sont conditionnées par les symétries. Rq "Symmetrie, Gruppe, Dualitat" Berlin ... Birkhauser 1989.

Wigner 1927 . L'usage de la théorie des représentations de groupes dans la mathématisation de la MQ
i) les représentations du groupe symétrique paraissent inévitables pour appréhender formellement des systèmes dans lsequels interviennet n particules indiscernables. ii) rapprochement entre les symétries et la théorie des représentations de groupes en MQ
"Cette méthode est fondée sur l'utilisation de propriétés élémentaires de symétries pour tous les systèmes atomiques, à savoir l'identité de tous les électrons et l'équivalence entre toutes les directions de l'espace , elle trouve dans la théorie des représentations son outil mathématique adéquat""Zur Erklärung einiger Eigenschaten der Spektren aus des Quanten machanik des Drehelektrons (Erster Teil)" Zeitschrift fur Physik 47 1928 p. 203.
Suite expliciter plus directement.

Philosophie et ontologie
Rôle des symétries (Brading)
pouvoir classificatoire cf. René -Just Haüy use de ce rôle quand la crystallographie est devenue une discipline distincte de la minéralogie
euristique et normatif rôle pour le principe de relativité RR et RG.
unificatoire tentatives pour unifier les forces fondamentales
et dans la tentative de Hilbert pour construire une théorie covariante générale de la gravitation et de l'électromagnétisme

rôle explicatif: p. e. c'est sur la base du premier théorème de Nœther que nous pouvons dire que c'est à cause des symétries de translation de la mécanique classique plus la satisfaction d'autres conditions que le moemnt linéaire est conserv'e dans cette théorie. Autre exemple appel aux principes de symétrie comme explication de la hiérarchie de Wigner, pour l'aspect des formes des lois et explique pourquoi certains événements se produisent et d'autres non

Symétries : ontologiques, épistémologiques, méthodologiques? De la fonction heuristiques 'a la fonction méthodologique et à une question sur leur statut ontologique ou méthodologique.
Si ontologique : les symétries caractéisent-elles la structure du monde physique?
interprétation des symétries spatiotemporelles des lois physiques comme symétries de l'espace temps lui-même, la "structure géométrique du monde physique. Cette manière de voir les symétries peut être étendue aux symétries non externes : les espaces internes. Question ouverte. Statut empirique ou observationnel: les symétries euvent-elles être observées directement? Il ya différentes sortes de symétries : les symétries globales continues peuvent être observ'ees (le bateau de Galilée) ce n'est pas le cas des symétries locales.

Selon Wigner les principes d'invariance spatiotemporelle joue un rôle pour découvrir les lois de la nature. Selon Wigner cette conception des principes de symétrie est essentiellement liée à notre ignorance. Les régularités spatio temporelles sont présupposées pour aller au fondemnt.
Signalons une interprétation transcendantale kantienne.
Remarques : différences entre sylmétries, et inexactitudes des symétries d'où recherhes préalables particulières.

Question de l'objectivité cf. H. Weyl. Encore ouvert.